Física I
Conceptos
y aplicaciones

Paul E. Tippens

Profesor emérito
Southern Polytechnic State University

Adaptación
Nydia Castro Sánchez
Licenciada en Física y Química de la Universidad Pedagógica Nacional - UPN
Especialista en enseñanza de las ciencias de la Universidad Pedagógica Nacional - UPN
Magíster en Investigación, desarrollo educativo y social. CINDE - UPN



BOGOTÁ • MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN
MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Por ejemplo,

$$\frac{(-4)(3)}{2} = -6 \qquad \text{par}$$

$$\frac{(-2)(-2)(-3)}{(2)(-3)} = +2 \qquad \text{impar}$$

Es conveniente que practique la aplicación de todas las reglas expuestas en esta sección. Es un grave error suponer que ha entendido estos conceptos sin comprobarlo adecuadamente. Una fuente importante de errores en la resolución de problemas de física es el uso de los números con signo.

1.2.2 Repaso de álgebra

El álgebra es en realidad una generalización de la aritmética, en la que se usan letras para reemplazar números. Por ejemplo, aprenderemos que el espacio ocupado por algunos objetos (su volumen, V) puede calcularse multiplicando el largo (l) por el ancho (a) y por la altura (h). Si se asignan letras a cada uno de esos elementos, establecemos una ***fórmula*** general, como

$$\text{Volumen} = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V = l \cdot a \cdot h \tag{1.1}$$

La ventaja de las fórmulas es que funcionan en cualquier situación. Dado el largo, el ancho y la altura de cualquier sólido rectangular podemos usar la ecuación (1.1) para calcular su volumen. Si deseamos averiguar el volumen de un bloque rectangular de metal, sólo debemos *sustituir* los números apropiados en la fórmula.

Ejemplo 1.2 Calcule el volumen de un sólido que tiene las medidas siguientes: largo, 6 centímetros (cm); ancho, 4 cm, y alto, 2 cm.

Plan: Recuerde o localice la fórmula para calcular el volumen y luego sustituya las letras (literales) con las cantidades proporcionadas.

Solución: La sustitución da por resultado

$$\begin{aligned} V &= lah \\ &= (6\text{ cm})(4\text{ cm})(2\text{ cm}) \\ &= 48\,(\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm}) = 48\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

El tratamiento de las unidades que dan por resultado un volumen expresado en centímetros cúbicos se comentará más adelante. Por ahora, céntrese en la sustitución de números.

Cuando las letras se sustituyen por números en una fórmula es muy importante insertar el signo apropiado de cada número. Considere la fórmula siguiente:

$$P = c^2 - ab$$

Suponga que $c = +2$, $a = -3$ y $b = +4$. Recuerde que los signos más y menos incluidos en las fórmulas no se aplican a ninguno de los números que pueden ser sustituidos. En este ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} P &= (c)^2 - (a)(b) \\ &= (+2)^2 - (-3)(+4) \\ &= 4 + 12 = 16 \end{aligned}$$

Resulta sencillo advertir que si se confunde un signo de la fórmula con el signo de alguno de los números sustituidos podría cometerse un error.

Con frecuencia es necesario resolver (despejar) una fórmula o una ecuación para una letra que es sólo parte de la fórmula. Suponga que deseamos encontrar una fórmula para calcular el largo de un sólido rectangular a partir de su volumen, su altura y su ancho. Las letras que aparecen en la fórmula $V = lah$ tendrán que reorganizarse para que la l aparezca sola en el lado izquierdo. El reordenamiento de la fórmula no es difícil si recordamos algunas reglas para trabajar con ecuaciones.

Básicamente, una ecuación es un enunciado matemático que dice que dos expresiones son iguales. Por ejemplo,

$$2b + 4 = 3b - 1$$

es una ecuación. En este caso, es evidente que la letra b representa la cantidad *desconocida* o, mejor dicho, la incógnita. Si sustituimos $b = 5$ en ambos lados o miembros de esta ecuación, obtenemos $14 = 14$. Por tanto, $b = 5$ es la *solución* de la ecuación.

Podemos obtener soluciones para igualdades realizando las mismas operaciones en los dos lados de la ecuación. Considere la igualdad $4 = 4$. Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos el número 2 en ambos lados, no se altera la igualdad. Lo que hacemos es, *en efecto*, aumentar o disminuir la magnitud de cada lado, pero la igualdad se conserva (será conveniente que usted verifique el enunciado anterior para la igualdad $4 = 4$). Observe también que si se eleva al cuadrado o se obtiene la raíz cuadrada en los dos lados no se altera la igualdad. Si se realiza la misma serie de operaciones en cada miembro de una ecuación es posible obtener finalmente una igualdad con una sola letra en el miembro izquierdo. En este caso, se dice que hemos *resuelto* (o despejado) la ecuación para esa letra.

Ejemplo 1.3 Resuelva para m la ecuación que sigue:

$$3m - 5 = m + 3$$

Plan: La clave es dejar sola la m en un lado del signo igual y del otro un número solo. Mientras sume o reste la *misma* cantidad en cada lado, la ecuación seguirá siendo verdadera.

Solución: Primero sumamos $+5$ a ambos lados y luego restamos m de los dos lados:

$$3m - 5 + 5 = m + 3 + 5$$
$$3m = m + 8$$
$$3m - m = m + 8 - m$$
$$2m = 8$$

Por último, dividimos ambos lados entre 2:

$$\frac{2m}{2} = \frac{8}{2}$$
$$m = 4$$

Para comprobar esta respuesta, sustituimos $m = 4$ en la ecuación original y obtenemos $7 = 7$, lo cual demuestra que $m = 4$ es la solución.

En las fórmulas, la solución de una ecuación también puede expresarse por medio de letras. Por ejemplo, la ecuación literal

$$ax - 5b = c$$

puede resolverse para x en términos de a, b y c. En casos como éste, decidimos de antemano cuál de las letras será la "incógnita". En nuestro ejemplo, elegiremos x. Las demás letras se tratan como si fueran números conocidos. Sumando $5b$ a ambos lados se obtiene

$$ax - 5b + 5b = c + 5b$$
$$ax = c + 5b$$

Ahora dividimos ambos lados entre a para obtener

$$\frac{ax}{a} = \frac{c + 5b}{a}$$

$$x = \frac{c + 5b}{a}$$

que es la solución para x. Los valores para a, b y c en una situación concreta se sustituyen para hallar un valor específico de x.

Ejemplo 1.4 El volumen de un cono circular recto se expresa con la fórmula

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad (1.2)$$

¿Cuál es la altura del cono si su radio es $r = 3$ cm y $V = 81$ centímetros cúbicos (cm^3)? (Suponga que $\pi = 3.14$).

Plan: Primero resuelva la fórmula para h en términos de r y V; luego debe sustituir los valores que tiene para V, π y r.

Solución: Al multiplicar ambos lados por 3 se obtiene

$$3V = \pi r^2 h$$

Si dividimos ambos miembros entre πr^2 resulta

$$\frac{3V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} \quad \text{o} \quad \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{h}{1}$$

Por tanto, la altura h está dada por:

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

Sustituyendo los valores que tenemos de V, π y r nos queda

$$h = \frac{3(81 \text{ cm}^3)}{(3.14)(3 \text{ cm})^2} = \frac{243 \text{ cm}^3}{28.26 \text{ cm}^2} = 8.60 \text{ cm}$$

La altura del cono es 8.60 cm.

1.2.3 Exponentes y radicales

Con frecuencia resulta necesario multiplicar una misma cantidad cierto número de veces. Un método abreviado para indicar el número de veces que una cantidad se toma como factor de sí misma consiste en usar un superíndice numérico conocido como ***exponente***. Esta notación sigue el esquema presentado a continuación:

Para cualquier número a:	Para el número 2:
$a = a^1$	$2 = 2^1$
$a \times a = a^2$	$2 \times 2 = 2^2$
$a \times a \times a = a^3$	$2 \times 2 \times 2 = 2^3$
$a \times a \times a \times a = a^4$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

Las potencias del número a se leen como sigue: a^2 se lee "a cuadrada"; a^3, "a cúbica"; y a^4, "a a la cuarta potencia". En general, se dice que a^n representa "a elevado a la n-ésima potencia". En tales ejemplos, la letra a es la ***base*** y los superíndices numéricos 1, 2, 3, 4 y n son los *exponentes*.

Repasaremos varias reglas que es necesario seguir al trabajar con exponentes.

Regla 1: Cuando se multiplican dos cantidades de la misma base su producto se obtiene sumando algebraicamente los exponentes:

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n} \qquad \textit{Regla de la multiplicación} \qquad (1.3)$$

Ejemplos:

$$(2^4)(2^3) = 2^{4+3} = 2^7$$
$$y^8y^6 = y^{14}$$
$$x^2x^5y^3x^3 = x^{2+5+3}y^3 = x^{10}y^3$$

Regla 2: Cuando a no es cero, un exponente negativo se define con cualquiera de las expresiones siguientes:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad \textit{Exponente negativo} \qquad (1.4)$$

Ejemplos:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \qquad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$
$$a^{-5} = \frac{1}{a^5} \qquad \frac{x^{-3}y^2}{a^{-4}b^3} = \frac{a^4y^2}{x^3b^3}$$

Regla 3: Cualquier cantidad elevada a la potencia cero es igual a 1:

$$a^0 = 1 \qquad \textit{Exponente cero} \qquad (1.5)$$

Ejemplos:

$$x^3y^0 = x^3 \qquad (x^3y^2)^0 = 1$$

Regla 4: El cociente de dos cantidades diferentes de cero y que tengan la misma base se halla efectuando la resta algebraica de sus exponentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \textit{División} \qquad (1.6)$$

Ejemplos:

$$\frac{2^3}{2} = 2^{3-1} = 2^2 \qquad \frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3-(-5)} = a^{-3+5} = a^2$$

Regla 5: Cuando una cantidad a^m se eleva a la potencia n, los exponentes se multiplican:

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \textit{Potencia de una potencia} \qquad (1.7)$$

Ejemplos:

$$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 \qquad (2^{-3})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$(a^2)^4 = a^8 \qquad (a^2)^{-4} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Regla 6: La potencia de un producto y la de un cociente se obtienen aplicando el exponente a cada uno de los factores.

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{1.8}$$

Ejemplos:

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$
$$(ab)^3 = a^3b^3$$
$$(ab^2)^3 = a^3(b^2)^3 = a^3b^6$$
$$\left(\frac{ax^3}{y^2}\right)^4 = \frac{a^4x^{12}}{y^8}$$

Si $a^n = b$, entonces no sólo b es igual a la n-ésima potencia de a, sino también se dice que, por definición, a es la raíz n-ésima de b. En general, este hecho se expresa usando un ***radical*** ($\sqrt{\ }$):

$$\sqrt[n]{b} \quad \text{raíz } n\text{-ésima de } b$$

Considere los enunciados siguientes:

$2^2 = 4$ significa que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, o sea, $\sqrt{4} = 2$

$2^3 = 8$ significa que 2 es la *raíz cúbica* de 8, o sea, $\sqrt[3]{8} = 2$

$2^5 = 32$ significa que 2 es la *raíz quinta* de 32, o sea, $\sqrt[5]{32} = 2$

Un radical también puede expresarse mediante un exponente fraccionario. En general, podemos escribir

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$$

Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} \quad \text{o} \quad \sqrt{10} = 10^{1/2}$$

Hay otras dos reglas que es indispensable conocer para trabajar con radicales.

Regla 7: La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de cada factor:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \textit{Raíces de un producto} \tag{1.9}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4}\,\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$
$$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a}\,\sqrt[5]{b}$$

Regla 8: Las raíces de una potencia se calculan aplicando la definición de exponentes fraccionarios.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad \textit{Raíz de potencias} \tag{1.10}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{2^9} = 2^{9/3} = 2^3 = 8$$

$$\sqrt{10^{-4}} = 10^{-4/2} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

$$\sqrt{4 \times 10^8} = \sqrt{4}\,\sqrt{10^8} = 2(10)^{8/2} = 2 \times 10^4$$

$$\sqrt[3]{8 \times 10^{-6}} = \sqrt[3]{8}(10)^{-6/3} = 2 \times 10^{-2}$$

Para resolver la mayor parte de los problemas de esta obra sólo se requiere un conocimiento limitado de las reglas anteriores. Lo que más se calcula son cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas. No obstante, es útil contar con un buen conocimiento de las reglas de los exponentes y radicales.

1.2.4 Solución a ecuaciones cuadráticas

Al resolver problemas de física, con frecuencia se necesita obtener una solución para una ecuación de segundo grado cuya incógnita está elevada a la segunda potencia. Por ejemplo, en cinemática la posición de una partícula en un campo gravitacional varía con el tiempo según la relación

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

donde x es el desplazamiento, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración y t el tiempo. Observe que la apariencia de t^2 significa que hay dos instantes en que el desplazamiento podría ser el mismo. Tales ecuaciones reciben el nombre de ***ecuaciones cuadráticas***. Hay varios métodos para resolver este tipo de ecuaciones, pero quizá para los problemas de física el más útil sea aplicar el de la fórmula cuadrática.

Dada una ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con a diferente de cero, las soluciones se hallan con la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1.5 Resuelva la ecuación siguiente para x: $3x^2 = 12 + 5x$.

Plan: La mayor potencia de la incógnita x es 2 y se puede aplicar la fórmula cuadrática. Escriba la ecuación en la forma cuadrática, determinar las constantes a, b y c, y después resolver x usando la fórmula.

Solución: La forma cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, así que podemos escribir

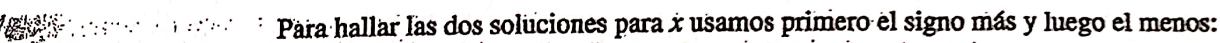
$$3x^2 - 5x - 12 = 0$$

Al analizar esa ecuación se observa que $a = 3$, $b = 5$ y $c = -12$. Ahora, resolvemos para x por sustitución en la fórmula cuadrática

$$x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-12)}}{2(3)}$$

$$= \frac{+5 \pm \sqrt{(25) + (144)}}{2(3)} = \frac{+5 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}$$



Para hallar las dos soluciones para x usamos primero el signo más y luego el menos:

Primera solución: $x = \frac{5 + 13}{6} = \frac{18}{6}$ o $x = +3$

Segunda solución: $x = \frac{5 - 13}{6} = \frac{-8}{6}$ o $x = -1.33$

Las dos respuestas son $x = +3$ y $x = -1.33$. Con base en las condiciones del problema, una de las soluciones puede ser matemáticamente verdadera pero imposible desde el ángulo de la física, lo cual indica que siempre debe interpretar los resultados a la luz de las condiciones establecidas.

Ejemplo 1.6 Se lanza una pelota hacia arriba con una rapidez inicial de $v_0 = 20$ m/s. La aceleración debida a la gravedad es $g = -9.80$ m/s². Si se tiene un desplazamiento de $y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$, determine los dos instantes en que el desplazamiento es $y = 12$ m arriba del punto donde se suelta la pelota.

Plan: Debe sustituir los valores dados para g, y y v_0 a fin de obtener la ecuación cuadrática, con el tiempo t como su incógnita. Después escriba la ecuación en su forma cuadrática y resuelva para t mediante la fórmula cuadrática.

Solución: La sustitución da como resultado

$$y = v_0t + \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{o} \quad (12) = 20t + \tfrac{1}{2}(-9.8)t^2$$

Hemos dejado fuera las unidades para que la incógnita t quede indicada con claridad. Al escribir esta expresión en forma cuadrática queda

$$4.9t^2 - 20t + 80 = 0$$

Ahora aplicamos la fórmula cuadrática para hallar las dos soluciones para t.

$$t = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(4.9)(12)}}{2(4.9)}$$

$$= \frac{+20 \pm \sqrt{400 - 235}}{9.8} = \frac{-20 \pm 12.8}{9.8}$$

De nuevo, encontramos las dos soluciones usando primero el signo más y luego el menos:

Primera solución: $t = \frac{20 + 12.8}{9.8} = \frac{32.8}{9.8}$ o $t = +3.35$ s

Segunda solución: $t = \frac{20 - 12.8}{9.8} = \frac{7.17}{9.8}$ o $t = +0.732$ s

La pelota alcanza la altura de 12 m en el instante $t = 0.732$ s después de que se le suelta. Luego alcanza el mismo desplazamiento en el instante $t = 3.35$ s.

1.2.5 Notación científica

En el trabajo científico es muy frecuente encontrarse con números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, cuando el operador de una máquina mide el grosor de una delgada hoja de metal puede obtener una lectura de 0.00021 pulgadas (in). De forma similar, un ingeniero puede hallar que el área de una pista de aeropuerto es de 130 000 m². Es conveniente que podamos expresar estos números como 2.1×10^{-4} in y 1.3×10^5 m², respectivamente. Se usan potencias de 10 para señalar la posición del punto decimal sin tener que manejar un gran número de ceros al

realizar cada uno de los cálculos. El sistema para expresar cualquier cantidad como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia entera de base 10 se llama ***notación científica***.

Las calculadoras electrónicas tienen una teclas que permiten incluso a los estudiantes principiantes usar la notación científica en muchos cálculos. Puede tener la seguridad de que se encontrará con la notación científica aunque su trabajo no requiera el uso frecuente de números expresados con ella. Revise el manual de su calculadora a fin de que aprenda a trabajar en ella con potencias de base 10.

Considere los múltiplos de 10 siguientes y algunos ejemplos de su utilización en la notación científica:

$$
\begin{aligned}
0.0001 &= 10^{-4} & 2.34 \times 10^{-4} &= 0.000234\\
0.001 &= 10^{-3} & 2.34 \times 10^{-3} &= 0.00234\\
0.01 &= 10^{-2} & 2.34 \times 10^{-2} &= 0.0234\\
0.1 &= 10^{-1} & 2.34 \times 10^{-1} &= 0.234\\
1 &= 10^{0} & 2.34 \times 10^{0} &= 2.34\\
10 &= 10^{1} & 2.34 \times 10^{1} &= 23.4\\
100 &= 10^{2} & 2.34 \times 10^{2} &= 234.0\\
1\,000 &= 10^{3} & 2.34 \times 10^{3} &= 2340.0\\
10\,000 &= 10^{4} & 2.34 \times 10^{4} &= 23\,400.0
\end{aligned}
$$

Para escribir en notación científica un número mayor que 1 debe determinar el número de veces que es preciso mover el punto decimal a la izquierda para obtener la notación abreviada. Veamos algunos ejemplos:

$$
\begin{aligned}
467 &= 4\,\underbrace{6\,7}. &&= 4.67 \times 10^{2}\\
30 &= 3\,\underbrace{0}. &&= 3.0 \times 10^{1}\\
35\,700 &= 3\,\underbrace{5\,7\,0\,0}. &&= 3.57 \times 10^{4}
\end{aligned}
$$

Cualquier número decimal menor que 1 puede escribirse como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia *negativa* de base 10. En este caso, el exponente negativo representa el número de veces que se mueve el punto decimal a la derecha. Este exponente siempre es igual al número de ceros que se encuentran entre el punto decimal y el primer dígito, más uno. Los siguientes son algunos ejemplos:

$$
\begin{aligned}
0.24 &= 0.\underbrace{2}\,4 &&= 2.4 \times 10^{-1}\\
0.00327 &= 0.\underbrace{0\,0\,3}\,2\,7 &&= 3.27 \times 10^{-3}\\
0.0000469 &= 0.\underbrace{0\,0\,0\,0\,4}\,6\,9 &&= 4.69 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

Para convertir la notación científica en notación decimal simplemente se invierte el proceso.

Con ayuda de las leyes de los exponentes, la notación científica sirve en la multiplicación y la división de números muy pequeños o muy grandes. Cuando se multiplican dos números, sus respectivos exponentes de base 10 se suman. Por ejemplo, $200 \times 4\,000$ puede escribirse como $(2 \times 10^{2})(4 \times 10^{3}) = (2)(4) \times (10^{2})(10^{3}) = 8 \times 10^{5}$. Otros ejemplos son

$$
\begin{aligned}
2200 \times 40 &= (2.2 \times 10^{3})(4 \times 10^{1}) &&= 8.8 \times 10^{4}\\
0.0002 \times 900 &= (2.0 \times 10^{-4})(9.0 \times 10^{2}) &&= 1.8 \times 10^{-2}\\
1002 \times 3 &= (1.002 \times 10^{3})(3 \times 10^{0}) &&= 3.006 \times 10^{3}
\end{aligned}
$$

De forma similar, cuando un número se divide entre otro, el exponente de base 10 que aparece en el denominador se resta del exponente de base 10 del numerador. Éstos son algunos ejemplos:

$$
\begin{aligned}
\frac{7000}{35} &= \frac{7 \times 10^{3}}{3.5 \times 10^{1}} = \frac{7.0}{3.5} \times 10^{3-1} &&= 2.0 \times 10^{2}\\
\frac{1200}{0.003} &= \frac{1.2 \times 10^{3}}{3.0 \times 10^{-3}} = \frac{1.2}{3.0} \times 10^{3-(-3)} &&= 4.0 \times 10^{5}\\
\frac{0.008}{400} &= \frac{8 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{2}} = \frac{8}{4} \times 10^{-3-2} &&= 2.0 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

Cuando se suman dos números expresados en notación científica es necesario tener cuidado de ajustar todos los que se van a sumar, de modo que tengan potencias idénticas de base 10. Veamos algunos ejemplos:

$$2000 + 400 = 2 \times 10^3 + 0.4 \times 10^3 = 2.4 \times 10^3$$
$$0.006 - 0.0008 = 6 \times 10^{-3} - 0.8 \times 10^{-3} = 5.2 \times 10^{-3}$$
$$4 \times 10^{-21} - 6 \times 10^{-20} = 0.4 \times 10^{-20} - 6 \times 10^{-20} = -5.6 \times 10^{-20}$$

Las calculadoras científicas hacen automáticamente los ajustes necesarios al sumar y restar ese tipo de números.

La notación científica y las potencias de base 10 son muy importantes y significativas cuando se trabaja con unidades métricas. En el capítulo 3 veremos que los múltiplos de 10 se usan para definir muchas unidades en el sistema métrico. Por ejemplo, un kilómetro se define como mil (1×10^3) metros y un milímetro como una milésima (1×10^{-3}) de metro.

1.2.6 Gráficas

Con frecuencia se desea mostrar en forma gráfica la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, sabemos que cuando un automóvil viaja con rapidez constante avanza la misma distancia cada minuto (min). Podríamos registrar la distancia recorrida, en pies (ft), para determinados tiempos, de la forma siguiente:

Distancia, ft	200	400	600	800	1000
Tiempo, min	1	2	3	4	5

En la parte inferior de una hoja de papel cuadriculado podemos establecer una escala de tiempo, quizá con cada división igual a 1 min. En el lado izquierdo del papel podemos establecer una escala de distancias. Es necesario seleccionar una escala que llene el papel cuadriculado (así se facilita la ubicación de los puntos en la gráfica). Las divisiones de la escala sencillas son: 1 división = 1, 2 o 5 multiplicado por alguna potencia de base 10. Algunos ejemplos adecuados son: 1 división = $1 \times 10^3 = 1000$, o 1 división = $2 \times 10^0 = 2$, o bien, 1 división = $5 \times 10^{-2} = 0.05$. Es preciso evitar divisiones de escala incómodas, como 3 divisiones = 100 ft, porque dificultan la ubicación de puntos. En nuestro ejemplo, podemos hacer que cada división represente 200 ft. Así, los datos se representan en la gráfica como muestra la figura 1.4. Cada punto ubicado en el eje (línea) horizontal tiene un punto correspondiente en el eje (línea) vertical. Por ejemplo, la distancia recorrida al cabo de 3 min es 600 ft. Observe que cuando se unen esos puntos, el resultado es una línea recta.

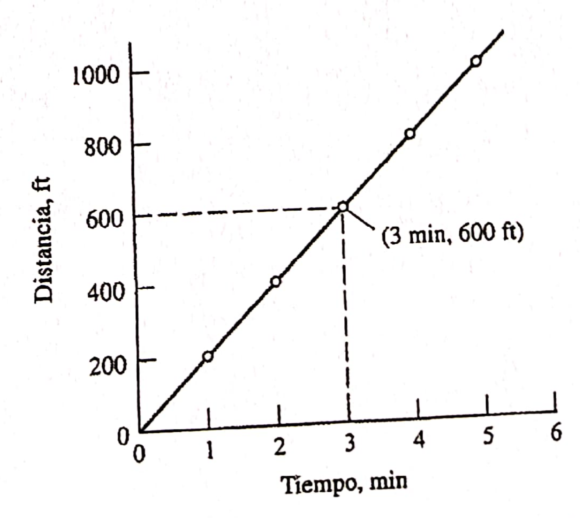


Figura 1.4 Gráfica de la distancia en función del tiempo (una relación *directa*).

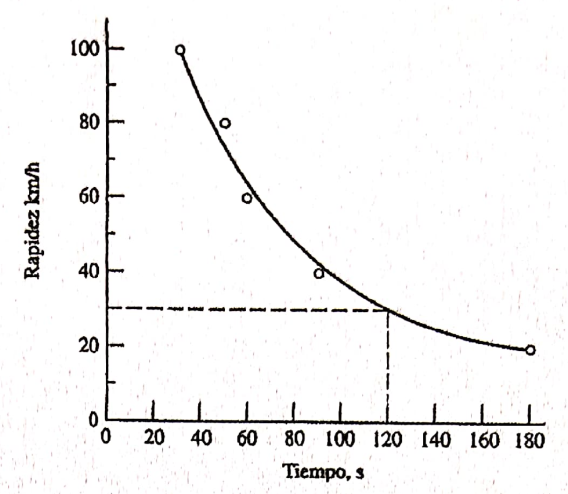


Figura 1.5 Gráfica del tiempo necesario para recorrer una distancia de 1 km como función de la rapidez (una relación *inversa*).

Cuando la gráfica de una cantidad frente a otra produce una línea recta que pasa por el origen hay entre ellas una *relación directa*. En este ejemplo, la distancia recorrida es directamente proporcional al tiempo. Cuando una de esas cantidades cambia, la otra también, y en la misma proporción. Si se duplica el tiempo transcurrido, se duplica la distancia recorrida.

También existen las *relaciones inversas* o indirectas, en las que el aumento de una cantidad produce como resultado la disminución *proporcional* de la otra cantidad. Si disminuyéramos la rapidez de un automóvil, veríamos que se requerirían intervalos de tiempo cada vez mayores para recorrer la misma distancia. Suponga que hemos medido, en segundos (s), el tiempo requerido para recorrer una distancia de 1 kilómetro (km) [0.621 millas (mi)] con rapidez de 20, 40, 60, 80 y 100 kilómetros por hora (km/h). De esta manera registramos los datos siguientes:

Rapidez, km/h	20	40	60	80	100
Tiempo, s	180	90	60	45	36

En la figura 1.5 se muestra una gráfica de estos datos. Nótese que la gráfica de una relación inversa no es una línea recta sino una curva.

Una gráfica sirve para obtener información con la que no se contaba antes de elaborarla. Por citar un caso, en la figura 1.5 advertimos que se requeriría un tiempo de 120 s para recorrer la distancia si nuestra rapidez fuera de 30 km/h.

1.2.7 Geometría

En este breve repaso presuponemos que usted conoce el concepto de punto y de recta. Veremos otros conceptos importantes sólo en la medida en que sean necesarios para resolver problemas de física. No es indispensable hacer un amplio repaso de los muchos teoremas posibles de esta disciplina. Comenzaremos con ángulos y rectas.

El ***ángulo*** comprendido entre dos líneas rectas se define trazando un círculo cuyo centro se ubica en el punto de intersección (véase la figura 1.6a). La magnitud del ángulo A es proporcional a la fracción de un círculo completo que se encuentra entre las dos rectas. Los ángulos se miden en ***grados***, como se define en la figura 1.6b. Un grado (°) es una parte de un círculo igual a 1/360 de una revolución completa (rev). Por tanto, en 1 rev hay 360°:

$$1° = \frac{1}{360}\text{ rev} \qquad 1\text{ rev} = 360° \tag{1.11}$$

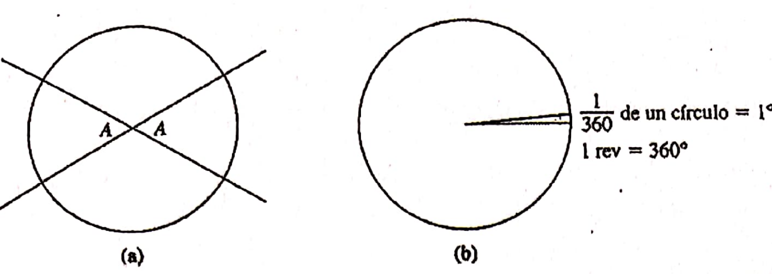


Figura 1.6 Un ángulo es una fracción de un círculo completo. Un grado es una parte del círculo que equivale a 1/360 de una revolución completa.

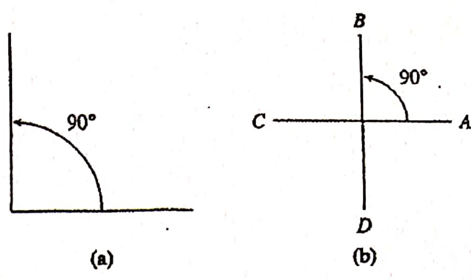


Figura 1.7 (a) Un ángulo recto es la cuarta parte de un círculo. (b) Las rectas que se cortan formando ángulos rectos reciben el nombre de perpendiculares.

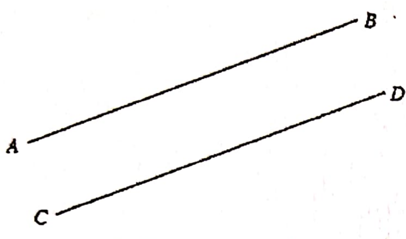


Figura 1.8 Las rectas paralelas que se extienden indefinidamente nunca se intersecan ($AB \parallel CD$).

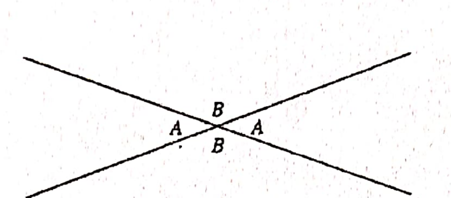


Figura 1.9 Cuando dos líneas rectas se intersecan, los ángulos opuestos son iguales.

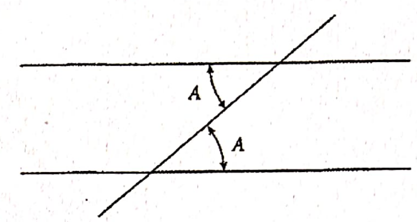


Figura 1.10 Cuando una línea recta se interseca con dos líneas paralelas, los dos ángulos internos resultan iguales.

El ángulo que corresponde a un cuarto de 1 rev, es decir, a 90°, recibe un nombre especial: se llama ***ángulo recto*** (véase la figura 1.7a). Cuando dos rectas se intersecan de manera que el ángulo formado entre ellas es recto, se dice que son ***perpendiculares***. La recta *CA* de la figura 1.7b es perpendicular a la recta *BD*. Esto puede escribirse como

$$CA \perp BD$$

donde $\perp$ significa "es perpendicular a".

Se dice que dos rectas son ***paralelas*** si nunca se intersecan, por más que se prolonguen sus extremos. En la figura 1.8 la recta *AB* es paralela a la línea *CD*, lo cual se escribe así:

$$AB \parallel CD$$

donde $\parallel$ significa "es paralela a".

La aplicación de la geometría requiere conocer sólo algunas reglas generales, describiremos tres de las más importantes de ellas.

Regla 1: Cuando dos rectas se intersecan, los ángulos opuestos que forman son iguales (véase la figura 1.9).

Regla 2: Cuando una recta interseca (se corta con) dos rectas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales (figura 1.10).

Observe en la figura 1.10 que los ángulos *A* se hallan a ambos lados de la recta que corta a las dos paralelas y se ubican dentro del espacio comprendido entre éstas. De acuerdo con la regla 2, estos ángulos *alternos internos* son iguales. (Los otros dos ángulos internos también son iguales).

Ejemplo 1.7 En un edificio en construcción, dos postes de tabique se han reforzado con un miembro cruzado, como se muestra en la figura 1.11. Calcule el ángulo C por medio de la geometría.

Plan: Suponga que los dos postes son paralelos y que, por tanto, el miembro cruzado forma una recta que los corta. Empiece con el ángulo dado y luego aplique las reglas 1 y 2 para hallar cada uno de los ángulos.

Solución: El ángulo A mide 60° de acuerdo con la regla 1; el ángulo B mide 60° según la regla 2, porque según ésta, los ángulos internos son iguales. Finalmente, aplique la regla 1 de nuevo para encontrar que el ángulo C mide 60°. A partir de este ejemplo, se observa que los ángulos *alternos externos* también son iguales, pero no es necesario postular una nueva regla.

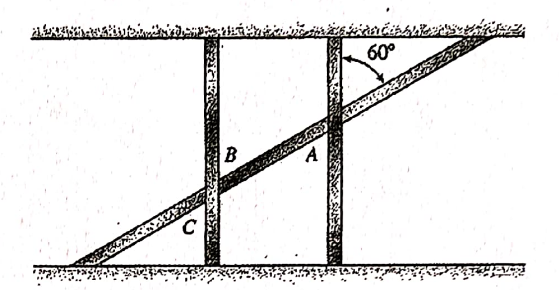


Figura 1.11

Un ***triángulo*** es una figura cerrada plana con tres lados. En la figura 1.12 se ejemplifica un triángulo con lados a, b y c y ángulos A, B y C. Un triángulo como éste, en el que no hay dos lados ni dos ángulos iguales, se llama ***triángulo escaleno***.

Un triángulo de especial interés para nosotros es el ***triángulo rectángulo***, que se ejemplifica en la figura 1.13. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo igual a 90° (dos de los lados son perpendiculares). El lado opuesto al ángulo de 90° se llama ***hipotenusa***.

Regla 3: En cualquier tipo de triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

$$A + B + C = 180°$$

Corolario: Para cualquier triángulo rectángulo ($C = 90°$), la suma de los dos ángulos más pequeños es igual a 90°.

$$A + B = 90°$$

En este caso, se dice que los ángulos A y B son *complementarios*.

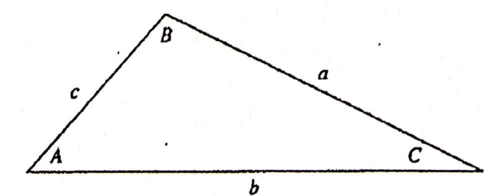


Figura 1.12 Un triángulo escaleno.

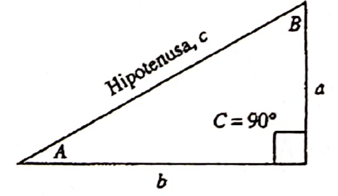


Figura 1.13 En un triángulo rectángulo uno de los ángulos internos debe ser recto.

Ejemplo 1.8 Aplique las reglas de la geometría para determinar los ángulos desconocidos en el caso ilustrado en la figura 1.14.

Plan: Observe toda la figura; busque las rectas perpendiculares (las que forman triángulos rectángulos). Con base en el ángulo de 30° que se proporciona, aplique las reglas de la geometría para hallar el valor de los otros ángulos.

Solución: Puesto que la recta *MC* es perpendicular a la recta *RQ*, tenemos un triángulo rectángulo en el que el ángulo menor es de 30°. La aplicación del corolario a la regla 3 produce:

$$30° + B = 90° \qquad \text{o} \qquad B = 60°$$

En virtud de que los ángulos opuestos son iguales, *D* también es igual a 60°. La recta *NF* es perpendicular a la recta *RP*, por lo que $A + D = 90°$. Por consiguiente,

$$A + 60° = 90° \qquad \text{y} \qquad A = 30°$$

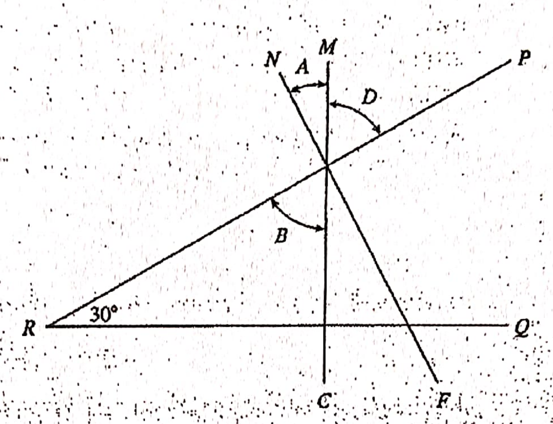


Figura 1.14

Otra regla importante para la geometría se basa en los lados de un triángulo rectángulo. Abordaremos el *teorema de Pitágoras* más adelante.

1.2.8 Trigonometría del triángulo rectángulo

A menudo es necesario determinar las longitudes y los ángulos a partir de figuras de tres lados conocidas como *triángulos*. Si aprende algunos principios que se aplican a todos los triángulos rectángulos, mejorará de manera significativa su habilidad para trabajar con vectores. Además, con las calculadoras portátiles los cálculos son relativamente sencillos.

Primero repasemos algunos de los temas que ya conocemos acerca de los triángulos rectángulos. Seguiremos la convención de usar letras griegas para identificar los ángulos y letras romanas para los lados. Los símbolos griegos que se usan comúnmente son:

α alfa	β beta	γ gama
θ *theta*	ϕ *phi*	δ delta

El teorema de Pitágoras:

$R^2 = x^2 + y^2$

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$

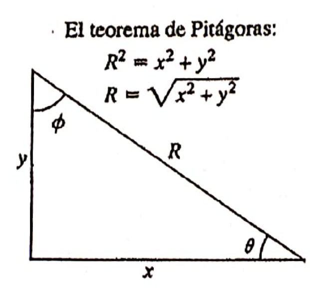


Figura 1.15

En el triángulo rectángulo de la figura 1.15, los símbolos R, x y y se refieren a las dimensiones de los lados, mientras que θ, ϕ y 90° corresponden a los ángulos. Recuerde que en un triángulo rectángulo la suma de los ángulos más pequeños es igual a 90°:

$$\phi + \theta = 90° \qquad \textit{Triángulo rectángulo}$$

Se dice que el ángulo ϕ es complemento de θ y viceversa.

También existe una relación entre los lados, la cual se conoce como el ***teorema de Pitágoras***:

Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

$$R^2 = x^2 + y^2 \qquad \textit{Teorema de Pitágoras} \qquad (1.12)$$

La *hipotenusa* se define como el lado mayor. En la práctica, puede ubicarla recordando que es el lado directamente opuesto al ángulo recto; es la recta que une los dos lados perpendiculares.

Ejemplo 1.9 ¿Qué longitud de cable de retén se necesita para formar un tirante desde lo alto de un poste telefónico de 12 m, hasta una estaca clavada en el suelo a 8 m de la base del poste?

Plan: Trace un esquema del problema como en la figura 1.16, donde se advierta que el cable de retén forma un triángulo rectángulo con el poste perpendicular al suelo. Etiquete la figura y aplique el *teorema de Pitágoras* para determinar la longitud del cable.

Solución: Identifique la longitud R del cable como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y después, con base en el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (12 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2$$
$$= 144 \text{ m}^2 + 64 \text{ m}^2 = 208 \text{ m}^2$$

Al obtener la raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación se obtiene

$$R = \sqrt{208 \text{ m}^2} = 14.4 \text{ m}$$

Recuerde dar su respuesta con tres cifras significativas. En este libro suponemos que todas las mediciones tienen tres dígitos significativos. En otras palabras, la altura del poste es 12.0 m y la base del triángulo es 8.00 m, a pesar de que, por comodidad, se han especificado como 12 m y 8 m.

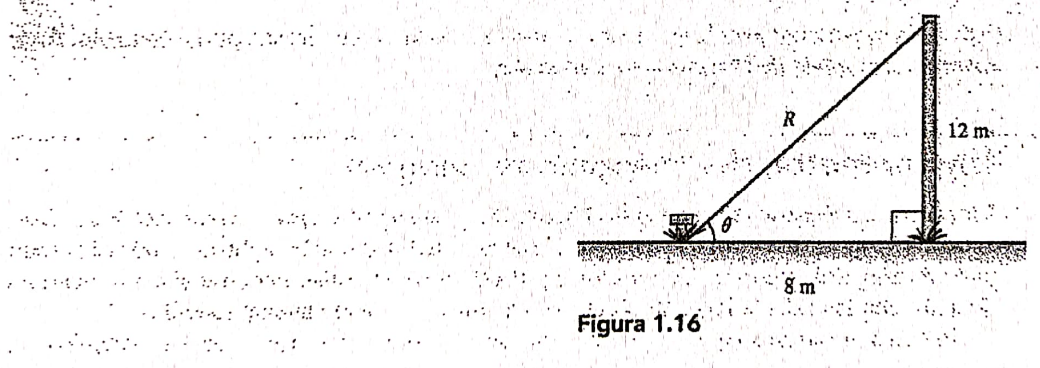


Figura 1.16

En general, para hallar la hipotenusa el teorema de Pitágoras puede expresarse como

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textit{Hipotenusa} \qquad (1.13)$$

En algunas calculadoras electrónicas, la secuencia de teclas para introducir la información podría ser

$$x \quad \boxed{x^2} \quad \boxed{+} \quad y \quad \boxed{x^2} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\sqrt{x}} \qquad (1.14)$$

En este caso, x y y son los valores de los lados más cortos, y los símbolos que aparecen encerrados en recuadros son las teclas de operación en la calculadora. Conviene comprobar la solución del problema anterior con $x = 8$ y $y = 12$. (El procedimiento de introducción de datos depende de la marca de la calculadora).

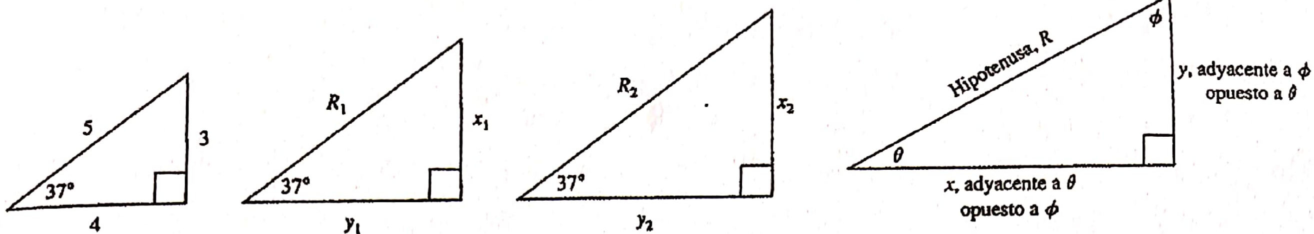


Figura 1.17 Todos los triángulos rectángulos que tienen los mismos ángulos internos son semejantes; es decir, sus lados son proporcionales.

Figura 1.18

Por supuesto, el teorema de Pitágoras sirve también para hallar cualquiera de los lados más cortos si se conocen los otros lados. La solución para x o para y es

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{1.15}$$

La ***trigonometría*** es la rama de las matemáticas que se basa en el hecho de que los triángulos semejantes son proporcionales en sus dimensiones. En otras palabras, para un ángulo dado, la relación entre dos lados cualesquiera es la misma, independientemente de las dimensiones generales del triángulo. En los tres triángulos de la figura 1.17, las razones de los lados correspondientes son iguales siempre que el ángulo sea de 37°. A partir de la figura 1.17 se observa que

$$\frac{3}{4} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

y también

$$\frac{4}{5} = \frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2}$$

Una vez que se ha identificado un ángulo en un triángulo rectángulo, debe marcarse el lado *opuesto* y el *adyacente* al ángulo. En la figura 1.18 se muestra el significado de opuesto, adyacente e hipotenusa. Es conveniente que estudie la figura hasta que entienda plenamente el significado de tales términos. Compruebe que el lado opuesto a θ es y y que el lado adyacente a θ es x. Observe también que los lados descritos como "opuesto" y "adyacente" cambian cuando nos referimos al ángulo ϕ.

En un triángulo rectángulo hay tres relaciones importantes entre los lados: el ***seno***, el ***coseno*** y la ***tangente***, que en el caso del ángulo θ se definen así:

Para cerciorarse de que ha comprendido estas definiciones, compruebe las expresiones

$$\text{sen}\,\theta = \frac{op\ \theta}{hip} \qquad \cos\theta = \frac{ady\,\theta}{hip} \qquad \tan\theta = \frac{op\ \theta}{ady} \tag{1.16}$$

siguientes para los triángulos de la figura 1.19:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{9}{15} \qquad \cos\gamma = \frac{m}{H} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{R} \qquad \cos\beta = \frac{n}{H} \qquad \tan\phi = \frac{12}{9}$$

12, θ, 9, 15, ϕ — (a)
β, R, y, α, x — (b)
n, m, β, γ, H — (c)

Figura 1.19

Primero debe identificar el ángulo recto y luego marcar el lado más largo (el opuesto al ángulo de 90°) como hipotenusa. Después, para un ángulo en particular, es preciso que identifique los lados opuesto y adyacente.

En cualquier calculadora científica es fácil obtener los valores constantes de las funciones trigonométricas. Lea el manual de la calculadora para que aprenda a obtener el seno, el coseno o la tangente de un ángulo, así como para determinar el ángulo cuyo seno, coseno o tangente es una razón específica. El procedimiento exacto depende de la calculadora. Úsela para comprobar que

$$\cos 47° = 0.682$$

En casi todas las calculadoras debemos introducir el número 47 y luego oprimir la tecla [cos] para que aparezca en la pantalla el resultado. Compruebe los datos siguientes:

$$\tan 38° = 0.781 \qquad \cos 31° = 0.857$$

$$\text{sen } 22° = 0.375 \qquad \tan 65° = 2.144$$

Para hallar el ángulo cuya tangente es 1.34 o el ángulo cuyo seno es 0.45 hay que invertir el procedimiento anterior. Con una calculadora, por ejemplo, se introduce primero el número 1.34 y luego se teclea alguna de estas secuencias, según la calculadora: [INV] [tan], [ARC] [tan], o bien, [$\tan^{-1}$]. Cualquiera de estas secuencias da como resultado el ángulo cuya tangente es el valor introducido. En los ejemplos anteriores obtuvimos

$$\tan\theta = 1.34 \qquad \theta = 53.3°$$

$$\text{sen }\theta = 0.45 \qquad \theta = 26.7°$$

Ahora ya puede aplicar la trigonometría para hallar los ángulos o lados desconocidos de un triángulo rectángulo. El procedimiento siguiente para resolver problemas le será útil.

Estrategia para resolver problemas

Aplicación de trigonometría

1. Trace el triángulo rectángulo a partir de las condiciones planteadas en el problema. (Marque todos los lados y ángulos, ya sea con el valor conocido o con un símbolo del valor que se desconoce).
2. Aísle un ángulo para su estudio; si se conoce uno de los ángulos, es el que debe seleccionar.
3. Marque cada lado de acuerdo con la relación que guarda con el ángulo elegido, ya sea op, ady o hip.
4. Decida cuál es el lado o ángulo que se va a calcular.
5. Recuerde las definiciones de las funciones trigonométricas.

$$\text{sen }\theta = \frac{op}{hip} \qquad \cos\theta = \frac{ady}{hip} \qquad \tan\theta = \frac{op}{ady}$$

6. Elija la función trigonométrica que incluya (a) la cantidad desconocida y (b) ninguna otra cantidad desconocida.
7. Escriba la ecuación trigonométrica apropiada y resuélvala para el valor desconocido.

Ejemplo 1.10

¿Cuál es la longitud del segmento de cuerda x en la figura 1.20?

Plan: El paso 1 de la estrategia de resolución de problemas ya está completo. Prosiga con los demás hasta determinar la longitud del segmento de cuerda x.

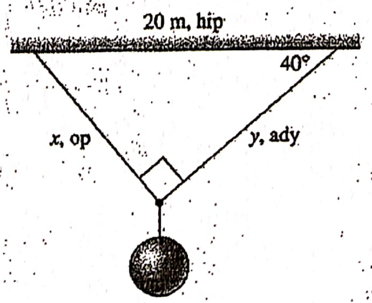
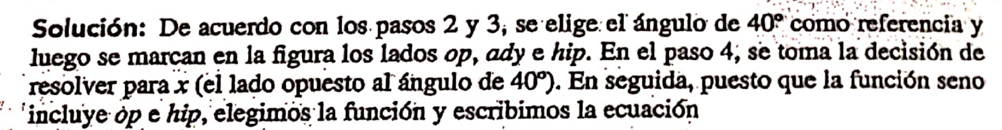


Figura 1.20



Solución: De acuerdo con los pasos 2 y 3, se elige el ángulo de 40° como referencia y luego se marcan en la figura los lados *op*, *ady* e *hip*. En el paso 4, se toma la decisión de resolver para x (el lado opuesto al ángulo de 40°). En seguida, puesto que la función seno incluye *op* e *hip*, elegimos la función y escribimos la ecuación

$$\operatorname{sen} 40^\circ = \frac{x}{20 \text{ m}}$$

Resolvemos para x multiplicando ambos lados por 20 m, y obtenemos

$$x = (20 \text{ m}) \operatorname{sen} 40^\circ \quad \text{o} \quad x = 12.9 \text{ m}$$

En algunas calculadoras podemos hallar x de esta forma:

$$(20 \text{ m}) \operatorname{sen} 40^\circ = 20 \; \boxed{\text{X}} \; 40 \; \boxed{\text{sin}} \; \boxed{=} \; = 12.9 \text{ m}$$

El procedimiento varía según la calculadora. Debe comprobar esta respuesta y usar su calculadora para mostrar que el lado $y = 15.3$ m.

Ejemplo 1.11

Un automóvil sube por la rampa mostrada en la figura 1.21, cuya base es de 20 m y tiene una altura de 4.3. ¿Cuál es el ángulo de su inclinación?

Plan: Trace un esquema y márquelo (véase la figura 1.21) sin perder de vista la información proporcionada y las relaciones del ángulo de inclinación. Luego siga la estrategia de resolución de problemas.

Solución: Identifique los lados *op*, *ady* e *hip* para el ángulo θ y observe que la función *tangente* es la única que implica los dos lados conocidos. Escribimos

$$\tan \theta = \frac{op}{ady} = \frac{4.3 \text{ m}}{20 \text{ m}} \quad \text{o} \quad \tan \theta = 0.215$$

El ángulo θ es aquel cuya *tangente es igual a* 0.215. En la calculadora obtenemos

$$\theta = 12.1^\circ$$

En algunas calculadoras la secuencia de teclas sería

$$4.3 \; \boxed{\div} \; 20 \; \boxed{=} \; \boxed{\tan^{-1}}$$

En algunas calculadoras hay que usar INV TAN, ATAN, ARCTAN u otros símbolos en vez de $\tan^{-1}$. Lo reiteramos: es preciso que lea el manual incluido con su calculadora.

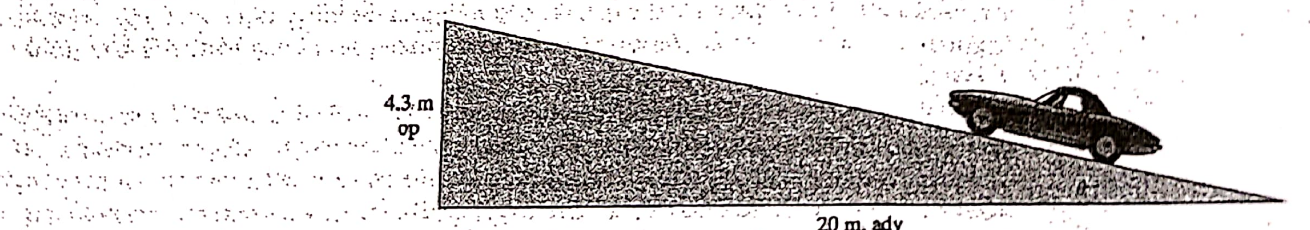


Figura 1.21